DM de mathématiques n°2

Calcul (sommes, trigo, complexes) – Corrigé

/4 **1)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}\\
=&\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{i}\\
=&\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i1^{j-i}\\
=&\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j\\
=&\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j1^{n-j}\\
=&(2+1)^n=\boxed{3^n}
\end{aligned}$$

/2 **2)** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\sin(2x)=\sin x$

On a

$$\begin{aligned}
\sin(2x)=\sin x &\iff 2x\equiv x\ [2\pi] \text{ ou } 2x\equiv \pi - x\ [2\pi]\\
&\iff x\equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } 3x\equiv \pi\ [2\pi]\\
&\iff x\in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]\\
&\iff x\in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x\in\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\\
&\iff x\in 2\pi\mathbb{Z}\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}=\boxed{2\pi\mathbb{Z}\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\right)}$$

3) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

/2,5 **a)** Pour quelles valeurs de z est-ce que le complexe $\frac{z+1}{z-1}$ est-il réel ?

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1}\in\mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}=\frac{z+1}{z-1}\\
&\iff (\overline{z}+1)(z-1)=(z+1)(\overline{z}-1)\\
&\iff z\overline{z}-\overline{z}+z-1=z\overline{z}+\overline{z}-z-1\\
&\iff 2z=2\overline{z}\\
&\iff z=\overline{z}\\
&\iff z\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc, puisque par hypothèse $z\neq 1$, on a : $\mathcal{S}=\boxed{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

/2,5 **b)** Pour quelles valeurs de z est-ce que le complexe $\frac{z+1}{z-1}$ est-il de module 1 ?

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=1 &\iff \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2=1\\
&\iff |z+1|^2=|z-1|^2\\
&\iff z^2+1+2\operatorname{Re}\left(z\overline{1}\right)=z^2+1-2\operatorname{Re}\left(z\overline{1}\right)\\
&\iff 4\operatorname{Re} z=0\\
&\iff \operatorname{Re} z=0
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\boxed{i\mathbb{R}}$.

/5 **4)** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\sqrt{|x^2+4x-12|}=x+1$

(Il n'y a pas de valeur interdite pour x car la valeur absolue est toujours positive)

- Si $x<-1$, alors $x+1<0<\sqrt{|x^2+4x-12|}$ donc dans ce cas $\mathcal{S}_1=\varnothing$
- Si $x\geq -1$, alors

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|x^2+4x-12|}=x+1\\
\iff& |x^2+4x-12|=(x+1)^2\\
\iff& |(x-2)(x+6)|=x^2+2x+1
\end{aligned}$$

(Comme on est sous l'hypothèse $x\geq -1$, il suffit de faire le tableau de signes suivant :)

x	$-1 \quad 2$	$2 \quad +\infty$
$(x-2)(x+6)$	$-$	$+$

— Si $x \geq 2$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & (x-2)(x+6) = x^2+2x+1 \\ \iff & x^2+4x-12 = x^2+2x+1 \\ \iff & 2x = 13 \\ \iff & x = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{13}{2}\right\}$.

— Si $x < 2$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & -(x-2)(x+6) = x^2+2x+1 \\ \iff & -x^2-4x+12 = x^2+2x+1 \\ \iff & 2x^2+6x-11 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = 36 - 4\times 2 \times (-11) = 36+88 = 124$$

Comme $\Delta > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-6+\sqrt{124}}{4} = \frac{-6+2\sqrt{31}}{4} = \frac{-3+\sqrt{31}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-6-\sqrt{124}}{4} = \frac{-3-\sqrt{31}}{2}$$

Ainsi, $x = x_1$ ou $x = x_2$. Vérifions si x_1 et x_2 sont bien dans $[-1,2[$. On remarque que $x_2 < \frac{-3}{2} < -1$, donc $x_2 \notin [-1,2[$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & 25 < 31 < 36 \\ \implies & 5 < \sqrt{31} < 6 \quad \text{par stricte croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \\ \implies & 2 < -3+\sqrt{31} < 3 \\ \implies & 1 < x_1 < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On a donc bien $x_1 \in [-1,2[$. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{S}_3 = \left\{\frac{-3+\sqrt{31}}{2}\right\}$.

Finalement, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \boxed{\left\{\frac{-3+\sqrt{31}}{2}, \frac{13}{2}\right\}}$.